E.N.S.I. NORD & SUD Option TB 1981

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES (4 h)

I

On désigne par $\mathbb{R}^*$ l'ensemble des nombres réels non nuls; a, b et α désignent trois constantes réelles.

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{ae^x + b}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = \alpha \end{cases}$$

1° Quelles conditions doivent vérifier a, b et α pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$?

2° Montrer qu'alors la fonction f est deux fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}$. Préciser les valeurs de $f'(0)$ et $f''(0)$.

3° On considère l'équation différentielle (1) du second ordre, à coefficients non constants

(1) $$xy'' + (2 - x)y' - y = 0.$$

a. Montrer que la fonction y_1 définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$y_1(x) = \frac{1}{x}$$ vérifie, sur $\mathbb{R}^*$, la relation (1)

b. On effectue le changement de fonction inconnue défini par $u(x) = xy(x)$. Montrer que la nouvelle fonction inconnue $u(x)$ vérifie une équation différentielle du second ordre à coefficients constants que l'on intégrera.

c. En déduire la solution générale de l'équation (1) sur $\mathbb{R}^*$.

d. Parmi les solutions de (1) existe-t-il des fonctions définies et continues pour tout $x \in \mathbb{R}$?

4° On considère la fonction φ de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = \frac{e^x + 1}{x}$$ pour $x \neq 0$

a. Déterminer la fonction dérivée $\varphi'(x)$. Montrer qu'elle s'annule pour une unique valeur β de x.

b. En appliquant un nombre convenable de fois la méthode de Newton à la résolution de l'équation :

$$e^x(x - 1) - 1 = 0$$

à partir de $x_0 = 2$, déterminer β à 10^{-5} près, puis $\varphi(\beta)$.

c. Construire avec soin le graphe de φ pour $0{,}5 \leqslant x \leqslant 2$. Calculer les valeurs de φ pour les valeurs de x en progression arithmétique de raison 0,25 appartenant à l'intervalle [0,5; 2]. On prendra pour unités 8 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

II

On considère la fonction g, définie pour tout x réel par les relations :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

1° Montrer que g est continue et dérivable au point $x = 0$.

2° *a.* Étudier les variations de la fonction $z(x) = e^x - 1 - xe^x$; en déduire le signe de la dérivée $g'(x)$.

b. Étudier les branches infinies de $g(x)$.

c. Construire sommairement le graphe Γ de $g(x)$.

3° On pose : $$h(x) = g(x) + \frac{x}{2}$$ pour tout x réel

a. Démontrer que la fonction h ainsi définie admet à tout ordre n un développement limité au voisinage de $x = 0$ dont la partie régulière sera notée :

.../...

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

b. Calculer le développement limité à l'ordre 5 de la fonction h au voisinage de zéro. Que peut-on dire des coefficients a_1, a_3 et a_5?

c. La propriété trouvée en *b.* est-elle généralisable à tout coefficient de la forme a_{2p+1} ? Pourquoi?

4° *a.* Démontrer que les coefficients a_k vérifient, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, la relation :

$$\frac{a_n}{1!} + \frac{a_{n-1}}{2!} + \ldots + \frac{a_2}{(n-1)!} = \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right]$$

b. Vérifier ainsi l'exactitude des coefficients trouvés au 3° *b.*

III

On désigne par E_n l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée sur $\mathbb{R}$, de degré inférieur ou égal à n et par E_0 le sous-espace des polynômes de degré zéro.

On désigne par φ_n l'application de E_n dans E_n qui, à tout polynôme P, fait correspondre le polynôme $Q = \varphi_n(P)$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad Q(x) = P(x+1) - P(x)$$

1° On considère la famille (A_k) des polynômes définis par :

$$\begin{cases} A_0(x) = 1 \\ \ldots \\ A_k(x) = x(x-1)\ldots(x-k+1) \end{cases}$$

Montrer que la famille $\{ A_0, A_1, A_2 \ldots A_n \}$ est une base de l'espace vectoriel E_n.

2° Montrer que φ_n est une application linéaire de E_n dans E_n.

Écrire la matrice de l'application φ_5 dans la base $\{ A_0, A_1, \ldots A_5 \}$.

Déterminer le noyau et l'image de φ_5.

3° On donne un polynôme R de degré inférieur ou égal à $n-1$. Montrer qu'il existe un polynôme P et un seul de E_n tel que soient simultanément vérifiées les deux conditions :

$$\begin{cases} \varphi_n(P) = R \\ \int_0^1 P(x)\,dx = 0 \end{cases}$$

Pour tout entier naturel k compris entre 1 et n on désignera par P_k le polynôme correspondant au cas $R(x) = kx^{k-1}$.

4° *a.* (B_k) $k = 1, 2, \ldots 5$ est la suite des polynômes définis par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad B_k(x) = (x+1)^k - x^k$$

Montrer que la famille $\{ B_1, B_2 \ldots B_5 \}$ est une base de l'espace vectoriel E_4.

b. En effectuant le changement d'inconnue défini par $u = \dfrac{x+1}{x}$, déterminer les racines sur $\mathbb{C}$ de l'équation :

$$B_4(x) = (x+1)^4 - x^4 = 0$$

et de l'équation :

$$B_5(x) = (x+1)^5 - x^5 = 0.$$

5° *a.* Déterminer les polynômes :

$$P_1, P_2, P_3, P_4 \text{ et } P_5$$

b. Vérifier que $P_5(1) = P_5\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$.

Déterminer les cinq racines de l'équation $P_5(x) = 0$.

XXXXXX

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail